MIRCEA GANGA

PROBLEME REZOLVATE DIN MANUALELE DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA A IX-a

EDITURA MATHPRESS

2008

CUPRINS

ALGEBRĂ

1. ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI TEORIA MULŢIMILOR

1.1. Chestiuni teoretice

1.1.1. Elemente de calculul propoziţiilor

Logica clasică a propoziţiilor are la bază trei principii:

1) **principiul terţului exclus** – o propoziţie nu poate fi decât fie adevărată, fie falsă.

2) **principiul nonconcordanţei** – o propoziţie nu poate fi în acelaşi timp adevărată şi falsă.

3) **principiul identităţii** – o propoziţie îşi păstrează valoarea sa de adevăr.

Logica matematică studiază propoziţiile doar din punct de vedere al valorii lor de adevăr.

Definiţii. 1) Se numeşte **alfabet**, o mulţime de semne.

2) Se numeşte **enunţ**, orice succesiune de semne dintr-un alfabet.

3) Se numeşte **propoziţie**, un enunţ care este fie adevărat, fie fals.

Propoziţiile se notează cu litere mici: $p, q, r, \ldots$

4) Se numeşte **valoare de adevăr** a unei propoziţii, proprietatea acesteia de a fi **adevărată** sau **falsă**.

Valoarea de adevăr a unei propoziţii se notează $v(p)$

$$v(p) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p \text{ este adevărată} \\ 0, \text{ dacă } p \text{ este falsă} \end{cases}.$$

5) Se numeşte **predicat** (sau **propoziţie cu variabile**), un enunţ care conţine una sau mai multe variabile, cărora atribuindu-le valori, obţinem propoziţii adevărate sau false.

Mulţimea elementelor pentru care obţinem propoziţii adevărate se numeşte **mulţimea de adevăr** a predicatului.

Cuantificatorul existenţial. Propoziţia existenţială. Cuantificator universal. Propoziţie universală.

Fie $p(x)$ un predicat unar, $x \in X$, $X \neq \emptyset$.

Definiţie. 1) Propoziţia „există cel puţin un x, astfel încât $p(x)$“ se numeşte propoziţie existenţială asociată predicatului $p(x)$.

Notaţie. $(\exists\, x)p(x)$ (citim: există x din X, astfel încât $p(x)$).

Simbolul „$\exists$ “ se citeşte: **există** şi se numeşte **cuantificator existenţial.**

Valoare de adevăr. Propoziţia $(\exists x)p(x)$ **este adevărată** dacă există cel puţin un x_0 din X, astfel încât propoziţia $p(x_0)$ să fie adevărată.
Propoziţia $(\exists x)p(x)$ **este falsă** dacă nu există nici un x_0 din X, astfel încât $p(x_0)$ să fie adevărată.

2) Propoziţia „oricare ar fi x din X, are loc $p(x)$" se numeşte propoziţie universală asociată predicatului $p(x)$.
Notaţie. $(\forall x)p(x)$ (citim: oricare ar fi x din X, are loc $p(x)$).
Simbolul „$\forall$" se citeşte **oricare ar fi** şi se numeşte **cuantificator universal.**
Valoarea de adevăr. Propoziţia $(\forall x)p(x)$ **este adevărată** dacă pentru orice x_0 din X propoziţia $p(x_0)$ este adevărată. Propoziţia $(\forall x)p(x)$ **este falsă** dacă există cel puţin un x_0 din X pentru care $p(x_0)$ este falsă.

Noţiunea de mulţime

Mulţimea este o noţiune primară, care nu se defineşte. Convenim să înţelegem prin mulţime o colecţie de obiecte cu proprietatea că despre un anume obiect se poate spune cu certitudine dacă este sau nu în colecţie şi în plus, în colecţie elementele nu se pot repeta. Obiectele colecţiei le numim elemente. O mulţime se descrie punând între paranteze acolade elementele ei, despărţite prin virgulă. Vom nota mulţimile cu litere mari $A, B, \ldots, X, \ldots$, iar elementele mulţimilor cu litere mici $a, b, \ldots$.
Faptul că elementul a se află în mulţimea A îl notăm $a \in A$ (citim: a aparţine mulţimii A). Dacă elementul b nu aparţine mulţimii A, atunci vom nota aceasta prin $b \notin A$ (citim: elementul b nu aparţine mulţimii A).
O mulţime poate fi descrisă fie **enumerând** elementele sale ($A = \{a, b, c\}$), fie **printr-o proprietate caracteristică** pe care o au elementele sale
($A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$).
O mulţime specială este mulţimea fără nici un element, numită **mulţimea vidă** şi notată cu $\emptyset$.

Definiţie. Mulţimea A **este o submulţime** a mulţimii X, dacă orice element din A este element şi pentru X.

Notaţie. $A \subset X$ şi citim: „mulţimea A este inclusă în X".

Proprietăţi ale incluziunii mulţimilor

1) **Reflexivitatea.** $A \subset A, \forall A$.
2) **Antisimetria.** Dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$, atunci $A = B$.
3) **Tranzitivitatea.** Dacă $A \subset B$ şi $B \subset C$, atunci $A \subset C$.

Diagrama Venn-Euler Dă o reprezentare grafică a unei mulţimi. Este o linie simplă închisă (cerc, oval sau dreptunghi) în interiorul căreia se scriu elementele mulţimii (dacă aceasta este finită).
În cazul mulţimilor infinite, se consideră că elementele lor sunt punctele planului delimitat de linia închisă.

Operaţii logice elementare

Definiţii. 1) **Negaţia** a) Fie p o propoziţie. Negaţia propoziţiei p este propoziţia $\overline{p}$, având tabelul de adevăr:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Complementara mulţimii A în raport cu mulţimea X este mulţimea $\complement_X A = \{x | x \in X \text{ şi } x \notin A\}$.

b) p propoziţie care conţin cuantificatori. Atunci $\overline{p}$ se obţine din p înlocuind „$\forall$" cu „$\exists$ ", „$\exists$" cu „$\forall$" şi $p(x)$ cu $\overline{p}(x)$.

2) **Conjuncţia propoziţiilor** p, q este propoziţia $p \wedge q$, având tabelul de adevăr alăturat.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Intersecţia mulţimilor A, B este mulţimea
$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}$

3) **Disjuncţia propoziţiilor** p, q este propoziţia $p \vee q$, având tabelul de adevăr alăturat.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Reuniunea mulţimilor A, B este mulţimea
$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}$

4) **Implicaţia propoziţiilor** p, q este propoziţia $p \to q$ (unde p este ipoteza, iar q este concluzia), având tabelul de adevăr alăturat.

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Fie A, B mulţimi. Atunci:
$A \subset B$ dacă $\forall\, x \in A$, atunci $x \in B$.

5) **Echivalenţa propoziţiilor** p, q este propoziţia $p \leftrightarrow q$, având tabelul de adevăr:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Fie A, B mulţimi. Atunci:
$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ şi } B \subset A)$.

6) **Legile lui De Morgan**. 1) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$;
2) $\overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$, $\forall p, q$ propoziţii.
1′) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$;
2′) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$, $\forall A, B$ mulţimi.

Mulţimi finite, infinite, mărginite

Definiţie. 1) O mulţime este **finită**, dacă are n elemente, $n \in \mathbb{N}$.
2) O mulţime este **infinită**, dacă nu este finită.
3) O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ se numeşte **mărginită**, dacă există numerele reale m, M astfel încât $m \leq x \leq M, \quad \forall x \in A$.

Reguli de numărare

Fie A o mulţime finită. Notăm prin $n(A)$, numărul de elemente ale mulţimii A.

Regula sumei. 1) Dacă A, B sunt mulţimi finite, disjuncte ($A \cap B = \emptyset$), atunci $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

2) Dacă A, B sunt mulţimi finite, atunci: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(principiul includerii şi excluderii)

3) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulţimi finite, atunci

$$n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} n(A_i) - \sum_{1 \le i \le j \le n} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots +$$
$$+(-1)^{n+1} n(\cap_{i=1}^{n} A_i).$$

(principiul includerii şi excluderii)

Regula produsului. 1) Fie $A, B \neq \emptyset$, mulţimi finite. Atunci produsul cartezian al mulţimilor A, B, în această ordine este mulţimea $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ şi } b \in B\}$.
În acest caz, $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$.

2) Dacă $A_i \neq \emptyset$, $i = \overline{1, n}$, atunci
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = \overline{1, n}\}$ şi
$n(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = n(A_1) n(A_2) \ldots n(A_n)$.

Metode de demonstraţie: 1) metoda reducerii la absurd; 2) metoda inducţiei matematice.

Metoda reducerii la absurd are la bază echivalenţa $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p})$.
Se neagă concluzia şi se ajunge să se contrazică ipoteza sau alt rezultat adevărat.

Metoda inducţiei matematice are la bază unul din următoarele principii:

Principiul inducţiei matematice. 1. Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \ge m$ ($m \in \mathbb{N}$, m fixat) dacă sunt verificate următoarele două condiţii:

1) Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru $n = m$

2) Din presupunerea că $p(n)$ este verificată pentru $n = k$, $k \ge m$, rezultă că este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

2. Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru orice $n \ge m$ ($m \in \mathbb{N}$, m fixat), dacă sunt îndeplinite condiţiile:

1) Propoziţia $p(n)$ este adevărată pentru $n = m$ şi $n = m + 1$.

2) Din presupunerea că $p(n)$ este adevărată pentru $n = k - 1$ şi $n = k$ ($k > m$), rezultă $p(n)$ este adevărată pentru $n = k + 1$.

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numeşte **partea întreagă a numărului** a, notat cu $[a]$, cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a.
Deci, $[a] \in \mathbb{Z}$ şi $[a] \le a < [a] + 1$.
Se numeşte **parte fracţionară a numărului** a, numărul notat $\{a\}$, diferenţa

dintre a şi partea sa întreagă.
Deci, $\{a\} = a - [a]$.

Proprietăţi. 1. $x \in [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x] = m$.
2. $x, y \in [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x] = [y]$.
3. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
4. $[m + x] = m + [x]$, $\{x + m\} = \{m\}$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}$.

Inegalităţi clasice remarcabile

1. Inegalitatea mediilor

Să se arate că pentru orice $a, b > 0$ au loc inegalităţile

$$\min(a, b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max(a, b).$$

Avem egalitate în inegalităţi dacă $a = b$.

R. Presupunem $a \leq b$. Atunci prima inegalitate devine $a \leq \frac{2ab}{a+b}$ sau $a(a+b) \leq 2ab$ sau încă $a^2 \leq ab$ sau în fine $a(a-b) \leq 0$, ceea ce este evident. Are loc egalitate ($a \neq 0$) dacă $a - b = 0$, adică pentru $a = b$.

A doua inegalitate se rescrie $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$ sau încă $2\sqrt{ab} \leq a + b$ sau $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, adevărat, fiind pătratul unui număr real.
Avem egalitate dacă $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, ceea ce dă $a = b$.

Inegalitatea $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ se rescrie echivalent $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, ceea ce este adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, adică dacă $a = b$.

Inegalitatea $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ prin ridicare la pătrat se rescrie echivalent $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ sau încă $a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$, adică $(a-b)^2 \geq 0$, evident, fiind pătratul unui număr real. Se obţine egalitate în inegalitate dacă în ultima inegalitate avem egalitate, adică dacă $a - b = 0$ sau $a = b$.

În fine, inegalitatea $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq b$ prin ridicare la pătrat se scrie echivalent $\frac{a^2 + b^2}{2} \leq b^2$ sau $a^2 \leq b^2$ sau $(a-b)(a+b) \leq 0$ sau $(a + b > 0)$ $a - b \leq 0$, ceea ce este adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $a = b$.
Cazul $a > b$ se abordează asemănător.

Observaţii. 1) Pentru $a, b > 0$ se notează:

$H(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, **media armonică a numerelor a, b;**

$G(a, b) = \sqrt{ab}$, **media geometrică a numerelor a, b;**

GEOMETRIE

1. VECTORI ÎN PLAN

1.1. Chestiuni teoretice

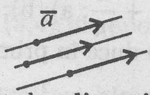
Definiţie. O pereche ordonată (A, B), $A, B \in \mathcal{P}$ se numeşte **segment orientat** sau **vector legat** (de A). Se notează $\overrightarrow{AB}$ şi are reprezentarea.

A se numeşte **originea**, iar B **extremitatea** vectorului legat $\overrightarrow{AB}$.

Prin **modulul vectorului** $\overrightarrow{AB}$ se înţelege lungimea segmentului $[AB]$. Se notează modulul lui $\overrightarrow{AB}$ prin $|\overrightarrow{AB}|$.

Definiţie. Se numeşte **vector liber**, mulţimea tuturor vectorilor legaţi care au: **aceeaşi direcţie, acelaşi sens şi acelaşi modul.**

Notaţie. $\overline{AB}, \overline{a}, \ldots$, iar reprezentarea este:



Observaţie. Orice vector liber este caracterizat de: **direcţie, sens şi modul.**

Definiţie. Doi vectori legaţi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ se numesc **echipolenţi** dacă au: 1) **aceeaşi direcţie**; 2) **acelaşi sens**; 3) **acelaşi modul.**

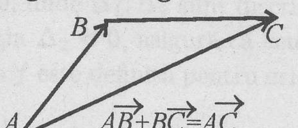
Notaţie. Dacă $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ sunt vectori echipolenţi, notăm aceasta prin $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

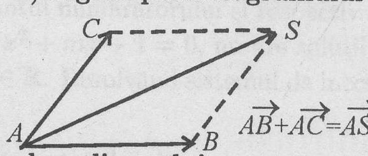
Adunarea vectorilor.

Pentru a aduna doi sau mai mulţi vectori liberi, se aleg convenabil reprezentanţi ai acestora.

Se poate realiza adunarea a doi vectori după:

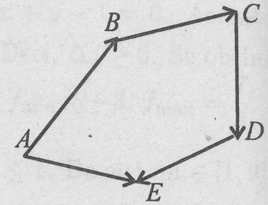
1) **regula triunghiului** 2) **regula paralelogramului**





Adunarea a n vectori se face după **regula poligonului.**

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$.



Înmulţirea unui vector cu un scalar

Definiţie. Fie $\alpha \neq 0$ şi $\overline{a} \in \mathcal{V}$, $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Produsul dintre numărul real (scalarul) α şi vectorul $\overline{a}$ este vectorul notat $\alpha\overline{a}$, având:

1) **aceeaşi direcţie** cu $\overline{a}$; 2) **acelaşi sens** cu $\overline{a}$, dacă $\alpha > 0$ şi **sens contrar lui** $\overline{a}$, dacă $\alpha < 0$; 3) modulul $\alpha|\overline{a}|$.

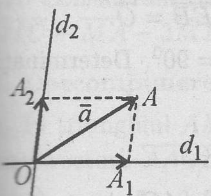
Dacă $\alpha = 0$ sau $\overline{a} = \overline{0}$, atunci $\alpha \cdot \overline{a} = \overline{0}$.

Definiţie. Doi vectori nenuli se numesc **coliniari**, dacă au aceeaşi direcţie. În caz contrar, vectorii se numesc **necoliniari**.

Teoreme de caracterizare a vectorilor coliniari

1. Vectorii $\overline{a}, \overline{b} \in \mathcal{V}$, $\overline{a}, \overline{b} \neq \overline{0}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\overline{a} = \alpha\overline{b}$.
2. Punctele A, B, C sunt coliniare $\Leftrightarrow$ oricare doi dintre vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ sunt coliniari.
3. Dreptele AB, CD sunt paralele $\Leftrightarrow$ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ sunt coliniari.

Descompunerea unui vector după două direcţii date



Fie d_1, d_2 două drepte concurente în O şi $\overline{a}$ un vector liber. Fie $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$. Pentru a realiza descompunerea vectorului $\overline{a}$ după direcţiile d_1, d_2, se duc prin A paralele la dreptele d_1 şi respectiv d_2, care le taie în A_2 şi respectiv A_1. Atunci $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, iar $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$ se numesc componentele vectorului $\overrightarrow{OA}$.

Bază. Cuplul $(\overline{a}, \overline{b})$ format din vectorii nenuli $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi necoliniari, se numeşte bază în $\mathcal{V}$ (mulţimea vectorilor liberi din plan).

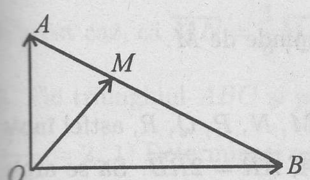
Teoremă. Orice vector nenul $\overline{x}$ din $\mathcal{V}$ se exprimă în mod unic în funcţie de vectorii bazei, $\overline{x} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$.

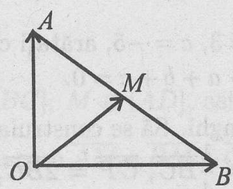
Numerele α, β se numesc **coordonatele** vectorului $\overline{x}$ în baza $(\overline{a}, \overline{b})$. Se notează $\overline{x} = (\alpha, \beta)$.

Punctul care împarte un segment într-un raport dat

Fie $M \in [AB]$, $\dfrac{AM}{MB} = k$, iar O un punct (pol) în plan. Atunci:

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + k\overline{OB}}{1+k}; \qquad AM = MB,\ \overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$$





1.2. Enunţurile problemelor

1. Adunarea vectorilor

1. Fie $ABCD$ un paralelogram, iar O punctul de intersecţie al diagonalelor. Arătaţi că $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{O}$.

2. Fie ABC un triunghi, iar M, N, P, mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi respectiv $[AC]$. Calculaţi sumele: $\overline{MN} + \overline{BM}$, $\overline{MN} + \overline{NP}$, $\overline{AM} + \overline{AP}$, $\overline{CN} + \overline{CP}$ în funcţie de $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$ şi determinaţi punctele Q şi R, pentru care $\overline{MB} + \overline{MN} = \overline{MQ}$ şi $\overline{PN} + \overline{PC} = \overline{PR}$. Arătaţi că $\overline{QR} = \overline{MP}$.

3. Fie $ABCD$, $AB'CD'$ două paralelograme, cu diagonala $[AC]$ comună. Arătaţi că $BB'DD'$ este paralelogram.

4. Fie $ABCD$ un paralelogram iar S un punct în interiorul său, prin care se duc paralele la laturile paralelogramului. Notăm cu M, N, P, Q punctele din intersecţie ale paralelelor cu laturile paralelogramului ($M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [AD]$). Arătaţi că $\overline{MQ} + \overline{QP} = \overline{BC}$.

5. Fie $ABCDE$ un pentagon convex, iar O un punct în planul său. Arătaţi că:
1) $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CA} = \overline{BD} + \overline{CE}$; 2) $\overline{OE} + \overline{BC} + \overline{DB} + \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{OC}$;
3) $\overline{AE} + \overline{OB} = \overline{AB} + \overline{OE}$; 4) $\overline{AE} + \overline{BO} + \overline{CD} + \overline{OC} + \overline{DA} + \overline{EB} = \overline{O}$.

6. Vectorii $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ au modulele $AB = AC = 1$, iar $m(\widehat{BAC}) = 90^0$. Determinaţi modulul vectorului $\overline{AB} + \overline{AC}$.

2. Înmulţirea unui vector cu un scalar

1. Fie ABC un triunghi, iar M, N, P mijloacele laturilor $[BC], [AC]$ şi respectiv $[AB]$. Arătaţi că: 1) $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$; 2) $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \overline{O}$.

2. Se consideră pătratul $ABCD$, de latură 1.
1) Precizaţi punctele E, F, G pentru care $\overline{BE} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, $\overline{DF} = 2\overline{DC}$, $\overline{DG} = -\overline{DA}$.
2) Arătaţi că $\overline{AG} + \overline{GF} + \overline{FB} = \overline{AC} + \overline{CF} + \overline{EB} + \overline{FE}$.
3) Determinaţi modulele vectorilor $\overline{AB} + \overline{BE}$, $\overline{AB} + \overline{CF}$.

3. Fie ABC un triunghi. Determinaţi punctul D, pentru care
$$2\overline{DA} + 3\overline{DB} - 5\overline{DC} = \overline{O}.$$

4. Fie A, B, C trei puncte în planul $\mathcal{P}$ şi $f : \mathcal{P} \to \mathcal{V}$, $\overline{f(M)} = a\overline{MA} + b\overline{MB} + c\overline{MC}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{P}$.
1) Pentru $a = 2$, $b = 3$, $c = -5$, arătaţi că $\overline{f(M)}$ nu depinde de M.
2) $\overline{f(M)} = \overline{f(M')} \Leftrightarrow a + b + c = 0$.

5. Fie ABC un triunghi. Să se construiască punctele M, N, P, Q, R, astfel încât $\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{NC} = \frac{1}{4}\overline{BC}$, $\overline{CP} = 2\overline{BC}$, $\overline{QC} = -2\overline{QA}$, $\overline{AR} = 2\overline{RB}$. Să se arate că $\overline{MR} + \overline{RC} + \overline{CP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{MA} + \overline{AN} + \overline{NQ} + \overline{QB}$.

6. Fie ABC un triunghi şi punctele M, N, P, pentru care $\overline{AB} = 3\overline{AM}$, $\overline{BC} = 3\overline{CP}$, $\overline{CA} = 3\overline{CN}$. Demonstraţi că $\overline{MP} = 2\overline{MN}$.

7. Arătaţi că, în orice patrulater convex, mijloacele a două laturi opuse şi mijloacele diagonalelor sunt vârfurile unui paralelogram (daţi soluţie sintetică şi vectorială).

8. Se consideră triunghiul ABC şi $M \in (AB)$, astfel încât $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Paralela dusă prin M la BC, taie pe AC în N. Exprimaţi pe $\overline{AN}$ în funcţie de $\overline{AC}$, iar pe $\overline{MN}$ în funcţie de $\overline{CB}$.

9. Fie $ABCD$ un trapez ($AB||CD$), iar M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AD]$, $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[BD]$.

Arătaţi că: 1) $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$; 2) $\overline{PQ} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{DC})$.

10. Fie $ABCD$ un patrulater, în care M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Să se arate că:
1) $\overline{MP} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$, $\overline{QN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{DC})$; 2) $\overline{MP} + \overline{QN} = \overline{AC}$.

11. Considerăm triunghiul ABC. Arătaţi că nu există punctul M, pentru care $2\overline{MC} + \overline{MA} - 3\overline{MB} = \overline{AC}$.

3. Descompunerea unui vector după două direcţii date

1. În triunghiul ABC, fie A', B', C' mijloacele laturilor $[BC], [AC], [AB]$. Exprimaţi vectorii $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$.

2. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [AN]$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}, \frac{BN}{NC} = \frac{3}{4}, \frac{AP}{PN} = \frac{1}{3}$. Exprimaţi vectorii $\overline{AN}, \overline{MN}, \overline{AP}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}, \overline{AC}$.

3. Se consideră pătratul $ABCD$ şi punctele $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, $Q \in [AD]$, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}, \frac{BN}{NC} = 2, \frac{CP}{PD} = \frac{1}{2}, \frac{DQ}{QA} = \frac{1}{4}$. Exprimaţi vectorii $\overline{MN}, \overline{NP}, \overline{PQ}, \overline{QM}, \overline{MP}, \overline{NQ}$ în funcţie de vectorii $\overline{AB}, \overline{BC}$.

4. Pe latura $[AB]$ şi diagonala $[AC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M şi respectiv N, astfel încât $\overline{AM} = m\overline{AB}$, $\overline{AN} = n\overline{AC}$. Exprimaţi vectorii $\overline{MN}$ şi $\overline{MD}$ în funcţie de vectorii $\overline{AD}$ şi $\overline{AB}$. Caz particular, $m = \frac{1}{5}$, $n = \frac{1}{6}$. Arătaţi, în acest caz, că $\overline{MN} = \frac{1}{6}\overline{MD}$.

5. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in [BC]$, $M \in [AD]$, astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$, $\frac{AM}{MD} = 2$. 1) Determinaţi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pentru care $\overline{AM} + \overline{BM} + \overline{CM} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC}$.
2) Dacă O este un punct oarecare din plan, scrieţi vectorul $\overline{OM}$ în funcţie de vectorii $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$.

4. Coliniaritatea a doi vectori. Paralelismul a două drepte

1. Fie ABC un triunghi în care prelungim latura $[BC]$ cu segmentul $CD = \frac{1}{3}BC$ şi latura $[BA]$ cu segmentul $AE = \frac{AB}{2}$. Dacă O este punctul de intersecţie al dreptelor AD şi CE, arătaţi că O este mijlocul segmentului $[AD]$.

2. Se consideră triunghiul ABC şi M, N, P, astfel încât $\overline{AM} = \frac{2}{3}\overline{AB}$, $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{AC} = \overline{CP}$. Arătaţi că:
1) $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{3}\overline{BA}$, $\overline{NP} = \frac{3}{2}\overline{BC} - \overline{BA}$; 2) M, N, P sunt coliniare.

3. În paralelogramul $ABCD$, se consideră punctele E, F pe $[AD]$ şi respectiv $[CD]$, astfel încât $\overline{AE} = \overline{ED}$ şi $\frac{CF}{FD} = \frac{1}{3}$. Arătaţi că vectorii $2\overline{CE} + \overline{AF}$ şi $\overline{AB}$ sunt coliniari.

4. Fie $ABCDE$ pentagonul convex, pentru care P, S, Q, T, M, N sunt mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[PQ]$ şi respectiv $[TS]$. Arătaţi că $MN||AE$.

5. Pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ (sau pe prelungirile lor) ale triunghiului ABC se iau punctele M şi N, astfel ca $BM = CN$. Fie Q mijlocul lui $[MN]$, iar R mijlocul lui $[BC]$. Să se arate că QR este paralelă cu bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

6. Fie triunghiul ABC, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$. Dacă M este mijlocul laturii $[BC]$, iar $\{O\} = CD \cap BE$, să se arate că:
1) $DE||BC$ şi $BC = 3DE$; 2) Punctele A, O, M sunt coliniare.

7. Fie ABC un triunghi şi M, N, P puncte pe laturile $[AB], [AC]$ şi respectiv $[BC]$, astfel încât $\overline{MA} = -\frac{1}{3}\overline{MB}$, $\overline{NC} = -\frac{2}{3}\overline{NA}$, $\overline{PC} = \frac{2}{9}\overline{PB}$.. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

8. Pe latura $[AB]$ şi diagonala $[AC]$ ale paralelogramului $ABCD$ se iau punctele M şi N, astfel încât $\overline{AM} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{AN} = \frac{1}{4}\overline{AC}$. Arătaţi că punctele M, N, D sunt coliniare.

9. Fie $ABCD$ un paralelogram. Definim punctele E şi F prin $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{AB}$, $\overline{AF} = 3\overline{AD}$. Să se arate că punctele C, E, F sunt coliniare.

10. Fie M, N, P, Q, R şi S mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[MP]$, $[AQ]$ şi $[RN]$. Arătaţi că punctele D, Q, S sunt coliniare.

Teste de evaluare

Testul 1.

1. Fie triunghiul ABC şi punctele M, N, P, astfel încât $\overline{AB} = 3\overline{AM}$, $\overline{BC} = 3\overline{CP}$, $\overline{CA} = 3\overline{CN}$. Arătaţi că $\overline{MP} = 2\overline{MN}$, exprimând vectorii în funcţie de $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$.

2. Arătaţi că dacă $ABCD$ este paralelogram de centru O, atunci
$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = 4\overline{MO}, \forall M$.

3. Vectorii $\overline{GM}, \overline{GN}$ şi $\overline{GP}$ au acelaşi modul, iar suma lor este zero, (G, M, N, P fiind distincte). Arătaţi că G este centrul de greutate al triunghiului.

4. Fie P un punct interior triunghiului echilateral de centru O. Dacă P_1, P_2, P_3 sunt proiecţiile lui P pe laturile triunghiului, atunci $\overline{PP_1} + \overline{PP_2} + \overline{PP_3} = \frac{3}{2}\overline{PO}$.

Testul 2.

1. Fie A, B, C, D patru puncte distincte, iar M, N mijloacele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$. Să se arate că $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$.

2. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $E \in [AD]$, $AE = ED$, $S \in [BC]$, $\frac{CS}{BC} = \frac{1}{3}$, $R \in [DC]$, $\frac{DR}{DC} = \frac{1}{3}$. Exprimaţi vectorii $\overline{BE}, \overline{RS}$ în funcţie de $\overline{AB}$ şi $\overline{AD}$ şi apoi deduceţi că $BE||RS$.

3. Fie $ABCDEF$ hexagonul regulat înscris în cercul de centru O. Să se arate că $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} + \overline{AF} = 6\overline{AO}$.

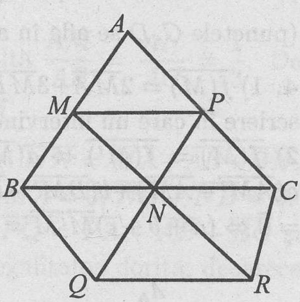
4. Să se arate că într-un triunghi echilateral ABC, înscris în cercul de centru O, avem $\overline{AB} + \overline{AC} = 3\overline{AO}$.

1.3. Rezolvările problemelor

1. Adunarea vectorilor

1. Avem $\overline{OA} = -\overline{OC}$, $\overline{OB} = -\overline{OD}$, care se adună şi dau relaţia dată.

2. $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{BM} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$.



Deci $\overline{MN} + \overline{BM} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB})$; $\overline{NP} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$ şi $\overline{MN} + \overline{NP} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB})$; $\overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{CB} = \frac{1}{2}(\overline{AB} - \overline{AC})$, $\overline{CN} + \overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AC}$.
Construim paralelogramul $BMNQ$, în care $\overline{MQ} = \overline{MB} + \overline{MN}$. Analog, construim paralelogramul $NPCR$, în care $\overline{PR} = \overline{PN} + \overline{PC}$.
Avem $\overline{QR} = \overline{QN} + \overline{NR} = \overline{BM} + \overline{PC} = \frac{1}{2}(-\overline{AB} + \overline{AC}) = \frac{1}{2}\overline{BC} = \overline{MP}$.

3. Patrulaterul $ABCD$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\overline{MA} + \overline{MC} = \overline{MB} + \overline{MD}$, $\forall M$. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor. Atunci, $\overline{MO} = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{MC})$ şi $\overline{MO} = \frac{1}{2}(\overline{MB'} + \overline{MD'})$. De aici, $\overline{MB} + \overline{MD} = \overline{MB'} + \overline{MD'}$, ceea ce arată că $AB'CD'$ este paralelogram. **Altfel**, din $\overline{AD} + \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AB'} + \overline{AD'}$ rezultă $\overline{AB} - \overline{AB'} = \overline{AD'} - \overline{AD} \Leftrightarrow \overline{BB'} = \overline{DD'}$. Laturile $[BB']$, $[DD']$ fiind paralele şi egale, deducem $BB'DD'$ paralelogram.

4. $\overline{MQ} + \overline{QP} = \overline{MP} = \overline{BC}$.

5. 1) Avem $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$, $\overline{BE} = \overline{BA} + \overline{AE}$, $\overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}$, care adunate dau $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CA} = (\overline{AB} + \overline{BA}) + \overline{BD} + \overline{AE} + \overline{CB} + \overline{BA} = \overline{0} + \overline{BD} + \overline{CE}$; 2) Avem: $\overline{OE} = \overline{OC} + \overline{CE}$, $\overline{AD} + \overline{DB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, pe care le adunăm şi dau relaţia dorită, deoarece $\overline{OE} + \overline{AC} = \overline{OC}$; 3) $\overline{OE} = \overline{OB} + \overline{BE}$, $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE}$ şi relaţia se verifică; 4) $\overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BO} + \overline{OC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{0}$, după regula poligonului.

6. $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$, astfel încât $ABDC$ este dreptunghi $|\overline{AB} + \overline{AC}| = \sqrt{2}$.